РАЗДЕЛ I.
МАТЕМАТИКА

УДК 514.76 + 512.54
DOI: 10.18384-2310-7251-2017-3-6-11

ЛЕВОЕ ТОЖДЕСТВО БОЛА В ТЕОРИИ СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

***Андроникова Е.О.*[1]*, Матвеев О.А.*[2]**

[1] *Московский государственный технологический университет «СТАНКИН»*
127994, г. Москва, Вадковский пер., д. 1, Российская Федерация

[2] *Московский государственный областной университет*
105005, Москва, ул. Радио, д. 10А, Российская Федерация

Аннотация. В работе рассматриваются геометрические и алгебраические свойства локально симметрического дифференцируемого многообразия аффинной связности. Обсуждаются тождества, выполняющиеся в геодезической лупе симметрического пространства аффинной связности. Используя левое тождество Бола, которому удовлетворяет геодезическая лупа в каждой точке пространства, можно вывести алгебраическое тождество, которому удовлетворяют геодезические симметрии локально плоских пространств. Полученные результаты применяются для решения задач на построение.

Ключевые слова: пространства аффинной связности, локально симметрические многообразия аффинной связности, геодезические линии, теория луп, геодезическая лупа, тождество Бола.

THE LEFT BOL IDENTITY IN THE THEORY OF SYMMETRIC SPACES WITH AN AFFINE CONNECTION

***E. Andronikova*[1]*, O. Matveyev*[2]**

[1] *Moscow State University of Technology "STANKIN"*
Vadkovskii per. 1, 105005 Moscow, Russian Federation

[2] *Moscow Region State University*
ul. Radio 10A, 105005 Moscow, Russian Federation

Abstract. We consider the geometric and algebraic properties of a locally symmetric differentiable manifold of an affine connection. The identities in the geodesic loop of a symmetric affine connection space are discussed. Using the left Bol identity, which the geodesic loop satisfies at each point of space, we derive an algebraic identity that is satisfied by the geodesic symmetries of locally flat spaces. The results obtained are used to solve construction problems.

Key words: spaces with affine connection, locally symmetric manifolds with affine connection, geodesic lines, loop theory, geodesic loop, Bol loops.

Тождества Бола (Bol, 1937) (левое и правое), обобщения тождества ассоциативности сначала изучались в рамках алгебраической теории луп вне какой-либо связи с геометрией. Позднее тождества Бола ярко проявили себя в теории тканей [1], а затем и в теории симметрических и некоторых других пространствах аффинной связности [2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10].

Выпишем левое тождество Бола в чисто алгебраической форме:

$$(x(zx))a = x(z(xa)), \tag{1}$$

(здесь мы ради краткости не пишем знак умножения). Если в левой лупе Бола выполняется тождество ассоциативности: $x(yz) = (xy)z$, то она является левой группой.

Определение 1. Пусть X – дифференцируемое многообразие. Частичную гладкую локальную алгебру $\chi = < X, (\omega_t)_{t\in R}$ с однопараметрическим семейством бинарных операций $(\omega_t)_{t\in R}$ на X называем многообразием с гомотетиями, если: а) для любой точки e из X существует такая открытая окрестность U, что для любых x и y из U и для любого вещественного числа t, принадлежащего некоторому открытому интервалу, содержащему отрезок $[0,1]$, $\omega_t(x, y) = t_x y$ определенно и принадлежит U; б) если $t_x y$ определенно, то $u_x(t_x y)$ определенно тогда и только тогда, когда $(ut)_x y$ определенно, и в этом случае $u_x(t_x y) = (ut)_x y$ ($t, u \in R$, $x \in X$, $y \in X$); в) локально выполняется тождество геометричности: $t_x y = (1 - t)_y x$; г) имеет место тождество: $1_x y = y$, $1 \in R$. При фиксированном действительным числе t, не равном нулю и единице, (локальное) отображение $\omega_t(x) : y \to t_x y$, определённое в достаточно малой открытой окрестности точки x, называем (локальной) гомотетией с центром в x с коэффициентом (растяжения или сжатия) t.

Предложение 1 [2]. Категория дифференцируемых многообразий с локальными гомотетиями эквивалентна категории многообразий аффинной связности с нулевым полем тензора кручения, причём множество точек вида $\{t_x y\}$, где действительное число t принадлежит связному открытому интервалу, содержащему отрезок $[0,1]$, является геодезической линией, проходящей через точки x и y. Имеет место формула: $\omega_t(y, z) = t_y z = Exp_y(t(Exp_y)^{-1} z)$, где Exp – экспоненциальное отображение.

Определение 2 [9]. Дифференцируемое многообразие аффинной связности называется локально симметрическим, если его поле тензора кручения T нулевое, а первая ковариантная производная тензора кривизны равна нулю ($T = 0$, $\nabla R = 0$).

Определение 3 [2]. Многообразие с гомотетиями $\chi = < X, (\omega_t)_{t\in R} >$ называется локально симметрическим, если выполняются тождества (когда правые и левые части равенств одновременно имеют смысл):

$$\left(-1\right)_x \circ \left(-1\right)_{t_x y} = \left(-1\right)_{t_y x} \circ \left(-1\right)_{y,} \ \left(-1\right)_x \circ t_y = t_{(-1)_x y} \circ \left(-1\right)_x . \qquad (2)$$

Предложение 2 [2]. Категория дифференцируемых локально симметрических многообразий с гомотетиями эквивалентна категории локально симметрических многообразий аффинной связности.

Левые сдвиги (двусторонней) квазигруппы $M_{-1} = M, C, \omega, \backslash, /$ есть геодезические симметрии симметрического пространства аффинной связности (здесь в наших обозначениях $x \cdot y = \left(-1\right)_x y,\ \ x \backslash y = \left(-1\right)_x y,\ \ y \backslash x = \left(\frac{1}{2}\right)_x y$. Главный левый изотоп этой квазигруппы есть геодезическая лупа симметрического пространства аффинной связности, левые сдвиги L которой (параллельный перенос вдоль геодезического отрезка [y, x]) подчиняются формуле (формула Эли Картана):

$$L_x^y = \left(-1\right)_{\left(\frac{1}{2}\right)_y x} \circ \left(-1\right)_y . \qquad (3)$$

Геодезическая лупа в каждой точке симметрического пространства подчиняется левому тождеству Бола, т. е. для геодезической лупы с нейтралом y можно записать:

$$(x[y](z[y]x))[y]a = x[y](z[y](x[y]a)). \qquad (4)$$

В этой формуле выражение «x[y]z» обозначает умножение x на z в точке y, т. е. $L_x^y z$ = x[y]z, где $L_x^y z$ – левый сдвиг (параллельный перенос) точки z геодезической лупы с нейтралом y из точки y в x. (Подробнее, $L_x^y z = Exp_x \tau_x^y\left(\left(Exp_y\right)^{-1} z\right)$, где $\tau_x^y : T_y\left(M\right) \to T_x\left(M\right)$ – параллельный перенос касательных векторов вдоль отрезка геодезической линии, соединяющего точки y и x, T_y – пространство касательных векторов, выходящих из точки y, Exp – экспоненциальное отображение).

Если мы подставим формулу (3) в тождество Бола (4), то получится довольно громоздкое выражение, которое можно упростить. Используя тождество геометричности для геодезических линий, выполняющееся в любом пространстве аффинной связности: $t_c\, b = (1 - t)_b\, c$, где b, c – точки, t – действительное число, имеем: $(-1)_c\, b = (2)_b\, c$. Также применяется характеристическое свойство симметрического пространства аффинной связности: геодезическая симметрия $(-1)_b$: $M \to M$ есть изоморфизм геометрической структуры. После замены переменных приходим к тождествам:

$$(0{,}5)_y(-1)_a(-1)_b(-1)_a y = (0{,}5)_x(-1)_a(-1)_b(-1)_a x = (-1)_a b. \qquad (5)$$

Предложение 3. В локально симметрическом многообразии аффинной связности (локально) выполняются тождества (5).

Следствие. В локально плоском многообразии аффинной связности, в частности в аффинном и евклидовом пространствах, выполняются тождества:

$$(0{,}5)_y(-1)_a(-1)_b(-1)_c y = (0{,}5)_x(-1)_a(-1)_b(-1)_c x = (0{,}5)_c(-1)_a(-1)_b c. \qquad (6)$$

Задача 1. В локально плоском пространстве аффинной связности (на конической или на цилиндрической поверхностях, в аффинном или евклидовом пространствах) заданы три точки d, e, f, не лежащие на одной геодезической линии. Известно, что эти точки лежат на серединах сторон геодезического треугольника abc, расположение вершин которого неизвестно; причём d – середина $[ab]$, e – середина $[cb]$, f – середина $[ac]$. Используя геодезическую симметрию, построить вершины геодезического треугольника.

Решение. Вершины a, b, c можно построить по формулам:

$a = (0{,}5)_x(-1)_d(-1)_e(-1)_f x$, x-произвольная точка, $b = (-1)_d a$, $c = (-1)_e b$. Доказательство правильности построения использует тождества (6).

Задача 2. В локально плоском пространстве аффинной связности (на конической или на цилиндрической поверхностях, в аффинном или евклидовом пространствах) заданы $(2n + 1)$ точки. Известно, что эти точки лежат на серединах сторон геодезического $(2n + 1)$ – многоугольника. Используя геодезическую симметрию, построить вершины геодезического многоугольника.

Правое тождество Бола $((xz)a))z = x((za)z)$ также нашло своё применение в теории пространств аффинной связности. Интересно, что выполнение в лупе одновременно правого и левого тождеств Бола, равносильно справедливости тождества Муфанг:

$$(x \cdot y)\cdot(z \cdot x) = x \cdot ((y \cdot z)\cdot x),$$

которое также хорошо известно в дифференциальной геометрии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акивис М. А., Шелехов А.М. Замкнутые G-структуры, определяемые три-тканями // Учёные записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. Т. 153. 2011, К. 3. Казань, Издательство Казанского университета, 2011. С. 22–28.
2. Андроникова Е.О., Дмитриева М.Н., Матвеев О.А., Матвеева Н.В. Гомотетии и параллельные переносы в проективно симметрических пространствах аффинной связности // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2016. № 3. С. 8–17.
3. Матвеев О.А. Квазигрупповые свойства многообразий с траекториями // Вестник Московского педагогического университета. Серия: Физика-математика. № 3–4. 1998. С. 10–15.
4. Матвеев О.А., Нестеренко Е.Л. Алгебраическая теория пространств, близких к симметрическим: монография. Lambert Academic Publishing, Germany, 2012. 125 с.
5. Матвеев О.А., Нестеренко Е.Л. О локально инвариантных пространствах аффинной связности // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика и математика, № 2. 2010. С. 19–27.
6. Матвеев О.А., Нестеренко Е.Л. Просимметрические пространства // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. № 7 (1). М.: Издательство Российского университета дружбы народов. 2000. С. 114–126.
7. Матвеев О.А., Нестеренко Е.Л. Универсальные алгебры в теории пространств аффинной связности, близких к симметрическим: монография. М.: Московский государственный областной университет, 2012. 132 с.

8. Matveyev O.A., Nesterenko E.L. On the quasigroup properties of prosymmetric spaces with zero curvature // Webs and quasigroups. Tver, 2002. P. 78–84.
9. Matveyev O.A., Nesterenko E.L. The real prosymmetric spaces // Non – Associative Algebra and Its Applications. A Series of Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. Vol. 246. Chapter 19. CRS Press Taylor and Francis Group. 2006. P. 253–260.
10. Sabinin L.V., Matveyev O.A. Geodesic loops and some classes of affine connected manifolds // Bulletin of RUDN. Series: Mathematics. 1995. No. 2(1). P. 135–243.

REFERENCES

1. Akivis M.A., Shelekhov A.M. [Closed G-structures defined by three fabrics]. In: *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki* [Scientific notes of Kazan University. Series: physics and mathematics], vol. 153, 2011, b. 3. Kazan, Kazan University Publishing house Publ., 2011. pp. 22–28.
2. Andronikova E.O., Dmitrieva M.N., Matveev O.A., Matveeva N.V. [Homothety and parallel shifts in the projective symmetric spaces with an affine connection]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2016, no. 3, pp. 8–17.
3. Matveev O.A. [Quasi-group properties of manifolds with trajectories]. In: *Vestnik Moskovskogo pedagogicheskogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], no. 3–4, 1998, pp. 10–15.
4. Matveev O.A., Nesterenko E.L. [Algebraic theory of spaces close to symmetric: monograph]. Lambert Academic Publishing Publ., Germany, 2012. 125 p.
5. Matveev O.A., Nesterenko E.L. [On locally invariant spaces with an affine connection]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika i matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], no. 2, 2010, pp. 19–27.
6. Matveev O.A., Nesterenko E.L. [Pro-symmetric space]. In: *Vestnik Rossiiskogo universiteta druzhby narodov. Seriya: Matematika*. [Bulletin of RUDN. Series: Mathematics], no. 7 (1). Moscow, Publishing house of the Russian University of Peoples' Friendship Publ., 2000. pp. 114–126.
7. Matveev O.A., Nesterenko E.L. *Universal'nyye algebry v teorii prostranstv affinnoy svyaznosti, blizkikh k simmetricheskim: monografiya* [Universal algebras in the theory of spaces with an affine connection close to symmetric: monograph]. Moscow, Moscow Region State University Publ., 2012. 132 p.
8. Matveyev O.A., Nesterenko E.L. On the quasi-group properties of prosymmetric spaces with zero curvature. In: *Webs and quasigroups*. Tver, 2002. Pp. 78–84.
9. Matveyev O.A., Nesterenko E.L. The real prosymmetric spaces. In: *Non. Associative Algebra and Its Applications. A Series of Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*. Vol. 246, chapter 19. CRS Press Taylor and Francis Group Publ.. 2006. Pp. 253–260.
10. Sabinin L.V., Matveyev O.A. Geodesic loops and some classes of affine connected manifolds. In: *Bulletin of RUDN. Series: Mathematics*, 1995, no. 2 (1), pp. 135–243.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Андроникова Екатерина Олеговна – магистр, аспирант кафедры прикладной математики Московского государственного технологического университета «СТАНКИН»;
e-mail: ya.kmatveyeva@yandex.ru

Матвеев Олег Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и геометрии физико-математического факультета Московского государственного областного университета;
e-mail: matveyevoa@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Ekaterina O. Andronikova – Master of Mathematics, postgraduate student at the Department of Applied Mathematics, Moscow State University of Technology "STANKIN";
e-mail: ya.kmatveyeva@yandex.ru

Oleg A. Matveyev – PhD in Physics and Mathematics, associate professor at the Department of Mathematical Analysis and Geometry of the Faculty of Physic and Mathematics, Moscow Region State University;
e-mail: matveyevoa@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Андроникова Е.О., Матвеев О.А. Левое тождество Бола в теории симметрических пространств аффинной связности // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2017. № 3. С. 6–11.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-3-6-11

CORRECT REFERENCE TO THE ARTICLE

Andronikova E.O., Matveyev O.A. The Left Bol Identity in the Theory of Symmetric Spaces with an Affine Connection. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2017, no. 3, pp. 6–11.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-3-6-11