РАЗДЕЛ I. МАТЕМАТИКА

УДК 519.683.5
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-1-6-15

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ГАММЕРШТЕЙНА ПЕРВОГО РОДА С ПРИБЛИЖЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

Усенов И. А.[1], Кенжебаев М. К.[2]

[1] *Кыргызский Национальный Университет имени Ж. Баласагына 720033, г. Бишкек, ул. Фрунзе, д. 547, Кыргызстан*

[2] *Кыргызский Экономический Университет имени М. Рыскулбекова 720033, г. Бишкек, ул. Т. Молдо, д. 58, Кыргызстан*

Аннотация. В Гильбертовом пространстве исследован класс нелинейных операторных уравнений первого рода. Построено приближенное решение, устойчивое относительно исходных данных задачи. Доказана сходимость приближенного решения к точному решению исходного уравнения. Произведён выбор параметра регуляризации от погрешностей.

Ключевые слова: уравнение Гаммерштейна, регуляризация, сходимость, уравнение первого рода.

REGULARIZATION OF THE SOLUTION TO THE HAMMERSTEIN OPERATOR EQUATION OF THE FIRST KIND WITH AN APPROXIMATELY SPECIFIED OPERATOR

I. Usenov[1], M. Kenzhebaev[2]

[1] *Kyrgyz National University named after Jusup Balasagyn ul. Frunze 547, 720033 Bishkek, Kyrgyzstan*

[2] *Kyrgyz Economic University named after M. Ryskulbekov ul. T. Moldo 58, 720033 Bishkek, Kyrgyzstan*

Abstract. A class of nonlinear operator equations of the first kind is investigated in the Hilbert space. An approximate solution is constructed that is stable with respect to the initial data of the problems. The convergence of the approximate solution to the exact solution of the original equation is proved. The regularization parameters of the errors are selected.

Keywords: Hammerstein equation, regularization, convergence, equation of the first kind.

Регуляризации решения линейного и нелинейного операторного уравнения в гильбертовом пространстве посвящены работы авторов [1–7; 9; 10; 12].

В работе [11] для решения операторного уравнения первого рода Гаммерштейна, когда точно задан линейный оператор, построен регуляризирующий оператор.

Постановка задач

В данной работе исследовано операторное уравнение первого рода Гаммерштейна в гильбертовом пространстве H

$$AF(z)=u, \tag{1}$$

когда приближенно задан линейный оператор, то есть вместо оператора A известно его приближенное значение A_h такое, что

$$\|A_h-A\|_H \le h, \tag{2}$$

где $A: H\to H$ – линейный самосопряжённый положительный оператор,

$F: H\to H$ – нелинейный оператор, дифференцируемый по Фреше.

В интегральном случае AF(z) определяется как:

$$AF(z)=\int_0^1 K(t,s)M(s,z(s))ds, K(t,s)=K(s,t)\in L_2([0,1]\times[0,1]),$$

$$\int_0^1\int_0^1 K(t,s)z(s)z(t)dsdt>0, M(s,z(s))\in C_{[0,1]\times R},$$

$\|\cdot\|_H$ – норма гильбертового пространства.

Допустим, что при $u=u_0$ уравнение (1) имеет точное решение z_0, то есть

$$AF(z_0)=u_0 \tag{3}$$

и истокообразно представимо

$$z_0=\sigma A\vartheta_0, \tag{4}$$

где $\sigma>0$, $\sigma\in R$, $\vartheta_0\in H$.

Целью данной работы является построение регуляризирующего оператора для решения операторного уравнения Гаммерштейна первого рода в пространстве Гильберта.

Регуляризация

Наряду с уравнением (1) рассмотрим уравнение:

$$\alpha z+A_hF(z)=u, \tag{5}$$

где $\alpha>0$.

Пусть

$$F(z)=K(z)+\sigma z, \tag{6}$$

где K – нелинейный оператор.

В [11] относительно нелинейного оператора K доказано, что для любого $z_1, z_2 \in H$ он удовлетворяет условию Липшица, то есть:

$$\left\| K(z_1) - K(z_2) \right\|_H \le N \left\| z_1 - z_2 \right\|_H,\ N < \sigma, \tag{7}$$

где $\lambda_i < a \le b < \lambda_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots$ $a \le F'(z) \le b$, $\sigma = \dfrac{a+b}{2}$, $\left\| K'(z) \right\|_H \le \dfrac{b-a}{2} \equiv N > 0$, а также доказана обобщённая лемма Лаврентьева М. М., что при любом $\alpha > 0$ и $\sigma > 0$ имеет место неравенство:

$$\left\| (\alpha E + \sigma A)^{-1} \right\|_H \le \alpha^{-1}. \tag{8}$$

Из (8) следует, что оператор $(\alpha E + \sigma A)^{-1} A$ удовлетворяет неравенству:

$$\left\| (\alpha E + \sigma A)^{-1} A \right\|_H \le \sigma^{-1}. \tag{9}$$

В силу представления (6) из уравнения (5) имеем:

$$\alpha z + \sigma A L_h z + A_h K(z) = u. \tag{10}$$

Оператор $\alpha E + \sigma A_h$ представим в виде:

$$\alpha E + \sigma A_h = (\alpha E + \sigma A) + (\sigma A_h - \sigma A) = (\alpha E + \sigma A)\left(E + (\alpha E + \sigma A)^{-1} \sigma (A_h - A)\right).$$

Используя оценки (2) и (8), оценим норму оператора $(\alpha E + \sigma A)^{-1}\sigma(A_h - A)$:

$$\left\| (\alpha E + \sigma A)^{-1} \sigma (A_h - A) \right\|_H \le \sigma h \alpha^{-1}. \tag{11}$$

Пусть имеет место предельное соотношение:

$$\lim_{h \to 0} h \alpha^{-1}(h) = 0. \tag{12}$$

Из условия (12) следует, что существует число $h_0 > 0$, такое, что:

$$q_1 = \sigma h \alpha^{-1} < 1, \tag{13}$$

при $h < h_0$.

При выборе $\alpha(h) = h^\beta$, $0 < \beta < 1$ условие (12) выполняется и $h_0 = (1/\sigma)^{\frac{1}{1-\beta}} > 0$.

Тогда в силу теоремы Банаха [8] оператор $E + (\alpha E + \sigma A)^{-1}\sigma(A_h - A)$ имеет обратный оператор, причём справедлива оценка:

$$\left\| \left(E + (\alpha E + \sigma A)^{-1} \sigma (A_h - A)\right)^{-1} \right\|_H \le (1 - q_1)^{-1}. \tag{14}$$

Таким образом, оператор $\alpha E + \sigma A_h$ имеет обратный оператор, и этот оператор представим в виде:

$$L_{\alpha,h} = (\alpha E + \sigma A_h)^{-1} = \left(E + (\alpha E + \sigma A)^{-1} \sigma (A_h - A)\right)^{-1} (\alpha E + \sigma A)^{-1}. \tag{15}$$

Из (15), используя неравенства (8) и (14), получаем:

$$\left\|\left(\alpha E+\sigma A_h\right)^{-1}\right\|_H \le \left(1-q_1\right)^{-1}\alpha^{-1}. \tag{16}$$

Тогда из уравнения (10) переходим к уравнению:

$$z_{\alpha,h} = L_{\alpha,h}u - L_{\alpha,h}A_hK\left(z_{\alpha,h}\right). \tag{17}$$

Введём обозначение:

$$T_{\alpha,h}\left(z_{\alpha,h}\right) = L_{\alpha,h}A_hK\left(z_{\alpha,h}\right). \tag{18}$$

Норма оператора $(\alpha E + \sigma A_h)^{-1}A_h$ удовлетворяет оценке:

$$\left\|\left(\alpha E+\sigma A_h\right)^{-1}A_h\right\|_H \le \left(1-q_1\right)^{-1}\left(h\alpha^{-1}+\sigma^{-1}\right). \tag{19}$$

Оценим норму оператора $T_{\alpha,\mathrm{h},\sigma}(z)$:

$$\left\|T_{\alpha,h}\left(z_1\right)-T_{\alpha,h}\left(z_2\right)\right\|_H = \left\|L_{\alpha,h}A_h\left(K\left(z_1\right)-K\left(z_2\right)\right)\right\|_H. \tag{20}$$

Тогда из (20), используя оценки (7), (19), имеем:

$$\left\|T_{\alpha,h}(z_1)-T_{\alpha,h}(z_2)\right\|_H \le \left\|L_{\alpha,h}A_h\right\|_H \left\|K\left(z_1\right)-K\left(z_2\right)\right\|_H \le$$
$$\le \left(1-q_1\right)^{-1}\left(h\alpha^{-1}+\sigma^{-1}\right)N\left\|z_1-z_2\right\|. \tag{21}$$

Из условия (12) следует, что существует число $\tilde{h}_0>0$, такое, что

$$q_2 = \left(1-q_1\right)^{-1}\left(h\alpha^{-1}+\sigma^{-1}\right)N<1 \tag{22}$$

при $h<\tilde{h}_0=\left(\left(\sigma-N\right)\left(\sigma\left(\sigma+N\right)\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}>0.$

Таким образом, оператор $T_{\alpha,\mathrm{h},\sigma}(z)$ является оператором сжатия.

Уравнение (17) решаем методом последовательных приближений.

За нулевые приближения возьмём элемент

$$\tilde{z}_0 = L_{\alpha,h}u. \tag{23}$$

Остальные приближения определяются по формуле:

$$z_{k+1}=\tilde{z}_0+L_{\alpha,h}A_hK\left(z_k\right) \quad k=0,1,2,\ldots \tag{24}$$

Покажем, что последовательность $\left\{z_\kappa\right\}_{\kappa=0}^{\infty}$ является сходящейся.

Сходимость последовательности $\left\{z_\kappa\right\}_{\kappa=0}^{\infty}$ и функционального ряда вида:

$$\tilde{z}_0+\left[z_1-\tilde{z}_0\right]+\left[z_2-z_1\right]+\ldots+\left[z_k-z_{k-1}\right]+\ldots \tag{25}$$

эквивалентны.

Нулевое приближение $\tilde{z}_0$ удовлетворяет неравенству

$$\left\|\tilde{z}_0\right\|_H \le \left(1-q_1\right)^{-1}\alpha^{-1}\left\|u\right\|. \tag{26}$$

Полагая $k = 0$, из (24), имеем:

$$\left\|z_1 - \tilde{z}_0\right\|_H = \left\|L_{\alpha,h} A_h K\left(\tilde{z}_0\right)\right\|_H \le \left\|L_{\alpha,h} A_h \left(K\left(\tilde{z}_0\right) - K(0)\right)\right\|_H + \\ + \left\|L_{\alpha,h} A_h K(0)\right\|_H \le q_2 \left(\left\|\tilde{z}_0\right\|_H + N^{-1}\left\|K(0)\right\|_H\right). \quad (27)$$

Полагая в (24) $k = 1$; $k = 0$ и вычитая из первого второе, получаем:

$$\left\|z_2 - z_1\right\|_H \le \left\|L_{\alpha,h} A_h \left(K\left(z_1\right) - K\left(\tilde{z}_0\right)\right)\right\|_H \le q_2 \left\|z_1 - \tilde{z}_0\right\|_H \le \\ \le q_2^2 \left(\left\|\tilde{z}_0\right\|_H + N^{-1}\left\|K(0)\right\|_H\right). \quad (28)$$

Далее по методу математической индукции можно доказать, что для любого натурального $k \ge 2$, справедливо неравенство:

$$\left\|z_k - z_{k-1}\right\|_H \le q_2^k \left(\left\|\tilde{z}_0\right\|_H + N^{-1}\left\|K(0)\right\|_H\right). \quad (29)$$

Таким образом, ряд (25) мажорируется следующим числовым рядом:

$$\sum_{k=1}^{\infty} q_2^k \left(\left\|\tilde{z}_0\right\|_H + N^{-1}\left\|K(0)\right\|_H\right). \quad (30)$$

Следовательно, условие $q_2 < 1$ при $h < \tilde{h}_0$ обеспечивает сходимость ряда (30), тогда ряд (25) также является сходящимся. Сумму ряда (25) обозначим через $z_{\alpha,h}$. В силу эквивалентности сходимости последовательности $\left\{z_{\text{к}}\right\}_{\text{к}=0}^{\infty}$ и ряда (25) имеем:

$$\lim_{k\to\infty} z_k = z_{\alpha,h} \quad (31)$$

Используя непрерывность оператора $L_{\alpha,h}A_hK$ при $k \to \infty$, переходим к пределу в (24) и, используя предельное соотношение (31), получим:

$$z_{\alpha,h} = \tilde{z}_0 + L_{\alpha,h} A_h K\left(z_{\alpha,h}\right). \quad (32)$$

Таким образом, сходимость ряда (25) доказана.

ТЕОРЕМА 1. Пусть: 1) задан оператор A_h, удовлетворяющий неравенству (2); 2) имеет место предельное соотношение (12). Тогда уравнение (17) при любом $u \in H$, $\alpha > 0$, $\sigma > 0$ и $h < \tilde{h}_0$ имеет единственное решение $z_{\alpha,h} \in H$.

Если решение уравнения (17) при $u = u_0$ обозначить через $z^0_{\alpha,h}$, тогда в силу формулы (32) оно представимо в виде:

$$z^0_{\alpha,h} = L_{\alpha,h} u_0 - L_{\alpha,h} A_h K\left(z^0_{\alpha,h}\right). \quad (33)$$

Рассмотрим разность $z^0_{\alpha,h} - z_0$

$$z^0_{\alpha,h} - z_0 = L_{\alpha,h} u_0 - L_{\alpha,h} A_h K\left(z^0_{\alpha,h}\right) - z_0. \quad (34)$$

Полагая, что $u_0 = \sigma A z_0 + AK(z_0)$, переходим в норму разности $z^0_{\alpha,h} - z_0$

$$\left\|z^0_{\alpha,h} - z_0\right\|_H \le \left\|L_{\alpha,h}\left(\sigma A z_0 - \alpha z_0 - \sigma A_h z_0\right)\right\|_H + \left\|L_{\alpha,h} A_h \left(K\left(z^0_{\alpha,h}\right) - K\left(z_0\right)\right)\right\|_H +$$
$$+ \left\|L_{\alpha,h}\left(A_h - A\right)\left(K\left(z_0\right) - K\left(0\right)\right)\right\|_H + \left\|L_{\alpha,h}\left(A_h - A\right)K\left(0\right)\right\|_H. \quad (35)$$

Используя (4), из (35) имеем:

$$\left\|z^0_{\alpha,h} - z_0\right\|_H \le \alpha\left(1-q_1\right)^{-1}\left(h\alpha^{-1} + \sigma^{-1}\right)\left\|v_0\right\|_H + h\alpha^{-1}\left(1-q_1\right)^{-1}\sigma M\left\|v_0\right\|_H\left(\sigma + N\right) +$$
$$+ h\alpha^{-1}\left(1-q_1\right)^{-1}\left\|K(0)\right\|_H + q_2\left\|z^0_{\alpha,h} - z_0\right\|_H \le \alpha\left(\sigma N^{-1} + \left(1-q_1\right)^{-1}\right)\left\|v_0\right\| +$$
$$+ h\alpha^{-1}\left(1-q_1\right)^{-1}\left(\sigma M\left\|v_0\right\|_H\left(\sigma+N\right) + \left\|K(0)\right\|_H\right) + q_2\left\|z^0_{\alpha,h} - z_0\right\|_H. \quad (36)$$

В силу условия (22) из (36) имеем оценку:

$$\left\|z^0_{\alpha,h} - z_0\right\|_H \le \alpha c_1 + h\alpha^{-1} c_2, \quad (37)$$

$$c_1 = c_3\left(\sigma N^{-1} + \left(1-q_1\right)^{-1}\right)\left\|v_0\right\|_H,$$
$$c_2 = c_3\left(1-q_1\right)^{-1}\left(\sigma M\left\|v_0\right\|_H\left(\sigma+N\right) + \left\|K(0)\right\|_H\right),\ c_3 = \left(1-q_2\right)^{-1}. \quad (38)$$

Минимизируя правую часть (37), имеем:

$$\alpha\left(h\right) = \sqrt{c_2 c_1^{-1} h}. \quad (39)$$

Подставляем (39) в правую часть (37), имеем:

$$\left\|z^\delta_{\alpha,h} - z_0\right\|_H \le 2\sqrt{c_1 c_2}\sqrt{h}. \quad (40)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть: 1) выполнены все условия теоремы 1; 2) при $u = u_0$ уравнение (1) имеет точное решение, представимое в виде (4); 3) зависимость параметра регуляризации от погрешности линейного оператора определяется по формуле (39). Тогда решение $z^0_{\alpha,h}$ уравнения (17) при $h \to 0$ сходится к точному решению уравнения (1), а скорость сходимости удовлетворяет условию (40).

Пусть правая часть уравнения (1) задана с погрешностью δ, то есть:

$$\left\|u_\delta - u_0\right\|_H \le \delta. \quad (41)$$

Основная задача, подлежащая исследованию, заключается в построении по приближенным данным $\{A_h, u_\delta\}$ такой последовательности решений $z^\delta_{\alpha,h}$, которая сходится в пространстве H к точному решению z^* уравнения (1) при условии сходимости исходных данных при $\delta, h \to 0$.

Решение уравнения (17) при $u = u_\delta$ обозначим через $z^\delta_{\alpha,h}$. Тогда в силу формулы (32) решение $z^\delta_{\alpha,h}$ представимо в виде:

$$z_{\alpha,h}^{\delta} = L_{\alpha,h}u_{\delta} + L_{\alpha,h}A_h K\left(z_{\alpha,h}^{\delta}\right). \tag{42}$$

Оценим разность $z_{\alpha,h}^{\delta} - z_0$. Используя неравенство треугольника, имеем:

$$\left\|z_{\alpha,h}^{\delta} - z_0\right\|_H \le \left\|z_{\alpha,h}^{\delta} - z_{\alpha,h}^{0}\right\|_H + \left\|z_{\alpha,h}^{0} - z_0\right\|_H. \tag{43}$$

Второе слагаемое в (43) удовлетворяет оценке (37). Оценим первое слагаемое:

$$\left\|z_{\alpha,h}^{\delta} - z_{\alpha,h}^{0}\right\|_H \le \left\|L_{\alpha,h}\left(u_{\delta} - u_0\right)\right\|_H +$$
$$+\left\|L_{\alpha,h}A_h\right\|_H \left\|K\left(z_{\alpha,h}^{\delta}\right) - K\left(z_{\alpha,h}^{0}\right)\right\|_H \le \delta\alpha^{-1} + q_2\left\|z_{\alpha,h}^{\delta} - z_{\alpha,h}^{0}\right\|_H. \tag{44}$$

Отсюда в силу (12) имеем:

$$\left\|z_{\alpha,h}^{\delta} - z_{\alpha,h}^{0}\right\|_H \le c_3\delta\alpha^{-1}. \tag{45}$$

Тогда из (43) имеем оценку:

$$\left\|z_{\alpha,h}^{\delta} - z_0\right\|_H \le \alpha c_1 + h\alpha^{-1}c_2 + c_3\delta\alpha^{-1}. \tag{46}$$

Минимизируя правую часть (46), имеем:

$$\alpha(\delta,h) = \sqrt{\left(c_3\delta + hc_2\right)c_1^{-1}}. \tag{47}$$

Подставляем (47) в правую часть (46) имеем:

$$\left\|z_{\alpha,h}^{\delta} - z_0\right\|_H \le 2\sqrt{c_1}\sqrt{c_3\delta + hc_2}. \tag{48}$$

Таким образом, доказана теорема, обобщающая теорему 2.

ТЕОРЕМА 3. Пусть: 1) выполнены все условия теоремы 2; 2) элемент u_{δ} удовлетворяет неравенству (41); 3) зависимость параметра регуляризации от погрешностей определяется по формуле (47). Тогда решение уравнения (17) при $\delta,\ h \to 0$ является приближенным решением уравнения (1). Скорость сходимости удовлетворяет условию (48).

Выводы и результаты исследования

В данной работе доказано, что решение операторного уравнения Гаммерштейна первого рода в пространстве Гильберта является регуляризируемым.

Обоснование регуляризируемости решения заключается в следующих результатах исследования:

1) построен регуляризирующий оператор для решения операторного уравнения первого рода в пространстве Гильберта;

2) доказана сходимость регуляризированного решения к точному решению исходного уравнения;

3) получен выбор параметра регуляризации в зависимости от погрешностей приближенно заданных исходных данных;

4) установленна сходимость и найдена оценка скорости сходимости регуляризированного решения к точному решению.

Статья поступила в редакцию 18.01.2019 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Доклады Академии наук СССР. 1963. Т. 151. № 3. С. 501–504.
2. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974. 223 с.
3. Лаврентьев М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: Издательство Сибирского отделения Академии наук СССР, 1962. 96 с.
4. Иманалиев М. И. Методы решения нелинейных обратных задач и их приложение. Фрунзе: Илим, 1977. 231 с.
5. Танана В. П. Методы решения операторных уравнений. М.: Наука, 1981. 150 с.
6. Саадабаев А. Построение регуляризирующих операторов для решения нелинейных операторных и интегральных уравнений первого рода: автореф. дис. … докт. ф.-м. наук. Новосибирск, 1993. 26 с.
7. Саадабаев А. Приближенные методы решения нелинейных интегральных и операторных уравнений 1-го рода. Бишкек. 1997. 218 с.
8. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функции и функционального анализа. М.: Наука. 2004. 572 с.
9. Усенов И.А., Сабиров Я.А. Регуляризация решения нелинейного операторного уравнения первого рода с линейными сходными операторами // Известия Кыргызского государственного технического университета имени И. Раззакова. 2009. № 17. С. 201–205.
10. Santhosh G., Kunhanandan M. Iterative Regularization Methods for III-Posed Hammerstein Type Operator Equation with Monotone Nonlinear Part // International Journal of Mathematical Analysis. 2010. Vol. 4. No. 34. P. 1673–1685.
11. Усенов И. А. Регуляризация решения операторного уравнения Гаммерштейна первого рода // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии: сборник статей. Вып. 41. Бишкек: Илим, 2009. С. 63–67.
12. Усенов И. А. Построение приближенного решения нелинейного операторного уравнения первого рода в гильбертовом пространстве // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2016. № 1. С. 8–14.

REFERENCES

1. Tikhonov A. N. [On the solution of ill-posed problems and method of regularization]. In: *Doklady Akademii nauk SSSR* [Soviet Mathematics], 1963, vol. 151, no. 3, pp. 501–504.
2. Tikhonov A. N., Arsenin V. Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Methods for solving ill-posed problems]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 223 p.
3. Lavrent'ev M. M. *O nekotorykh nekorrektnykh zadachakh matematicheskoi fiziki* [About some ill-posed problems of mathematical physics]. Novosibirsk, Izdatel'stvo Sibirskogo otdeleniya Akademii nauk SSSR Publ., 1962. 96 p.
4. Imanaliev M. I. *Metody resheniya nelineinykh obratnykh zadach i ikh prilozhenie* [Methods of solution of nonlinear inverse tasks and their application]. Frunze, Ilim Publ., 1977. 231 p.

5. Tanana V. P. Methods for solution of nonlinear operator equations. Berlin, De Gruyter, 1997. 248 p.
6. Saadabaev A. *Postroenie regulyariziruyushchikh operatorov dlya resheniya nelineinykh operatornykh i integral'nykh uravnenii pervogo roda: avtoref. dis. … dokt. f.-m. nauk* [The construction of regularizing operators for the solution of nonlinear operator and integral equations of the first kind: abstract of D. thesis in Physical and Mathematical sciences]. Novosibirsk, 1993. 26 p.
7. Saadabaev A. *Priblizhennye metody resheniya nelineinykh integral'nykh i operatornykh uravnenii 1-go roda* [Approximate methods for solving nonlinear integral and operator equations of the first kind]. Bishkek, 1997. 218 p.
8. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza* [Elements of the theory of functions and functional analysis]. Moscow, Nauka Publ., 2004. 572 p.
9. Usenov I. A., Sabirov Ya. A. [Regularization of solutions of nonlinear operator equations of the first kind with similar linear operators]. In: *Izvestiya Kyrgyzskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta imeni I. Razzakova* [Proceedings of the Kyrgyz State Technical University named after I. Razzakov], 2009, no. 17, pp. 201–205.
10. Santhosh G., Kunhanandan M. [Iterative Regularization Methods for Ill-Posed Hammerstein Type Operator Equation with Monotone Nonlinear Part]. In: *International Journal of Mathematical Analysis*, 2010, vol. 4, no. 34, pp. 1673–1685.
11. Usenov I. A. [Regularization of the solution of the Hammerstein operator equation of the first kind]. In: *Issledovaniya po integro-differentsial'nym uravneniyam v Kirgizii: sbornik statei. Vip. 41* [Studies on integro-differential equations in Kyrgyzstan: a collection of articles. Iss. 41]. Bishkek, Ilim Publ., 2009. pp. 63–67.
12. Usenov I. A. [Construction of an approximate solution of nonlinear operator equations of the first kind in a Hilbert space]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2016, no. 1, pp. 8–14.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Усенов Изат Абдраевич – кандидат физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений Кыргызского национального университета имени Ж. Баласагына;
e-mail: iausen@mail.ru

Кенжебаев Мирлан Курманалиевич – старший преподаватель кафедры математических методов в экономике Кыргызского экономического университета имени М. Рыскулбекова;
e-mail: kumir_1985@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Izat A. Usenov – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Professor at the Department of Differential Equations, Kyrgyz National University named after Jusup Balasagyn;
e-mail: iausen@mail.ru

Mirlan K. Kenzhebaev – Senior Lecturer at the Department of Mathematical Methods in Economics, Kyrgyz Economic University named after M. Ryskulbekov;
e-mail: kumir_1985@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Усенов И.А., Кенжебаев М. К. Регуляризация решения операторного уравнения Гаммерштейна первого рода с приближенным оператором // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2019. № 1. С. 6–15.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-1-6-15

FOR CITATION

Usenov I. A., Kenzhebaev M. K. Regularization of the solution to the Hammerstein operator equation of the first kind with an approximately specified operator In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2019, no. 1, pp. 6–15.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-1-6-15