

УДК 533.72

DOI: 10.18384-2310-7251-2018-2-51-60

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ИСПАРЕНИИ ДВУХ КАПЕЛЬ ОПЕРАТОРНЫМИ МЕТОДАМИ ДЛЯ ЛЮБЫХ РАДИУСОВ КАПЕЛЬ И ЛЮБЫХ РАССТОЯНИЙ МЕЖДУ НИМИ

**Хасанов А.С.**

*Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова  
117997, г. Москва, Стремянный пер., д. 36, Российская Федерация*

**Аннотация.** В данной статье задача об испарении в диффузионном режиме двух взаимодействующих крупных неподвижных аэрозольных капель с произвольными радиусами решена операторными методами при произвольных расстояниях между каплями. Приведены формулы для времени полного испарения капель и соответствующие графики, характеризующие фактор взаимодействия капель.

**Ключевые слова:** аэрозольные капли, испарение капель, взаимодействующие капли.

## THE SOLUTION OF THE EVAPORATION PROBLEM OF TWO DROPS BY OPERATOR METHODS FOR ARBITRARY RADII OF DROPS AND ARBITRARY DISTANCES BETWEEN THEM

**A. Khasanov**

*Plekhanov Russian University of Economics  
36 Stremyanny pereulok, 117997 Moscow, Russian Federation*

**Abstract.** The problem of evaporation of two interacting large stationary aerosol drops in diffusion mode is solved by operator methods for arbitrary radii of drops and arbitrary distances between them. Formulas for the complete evaporation time of drops are given and the corresponding graphs describing the interaction of the drops are presented.

**Key words:** aerosol drops, evaporation of drops, interacting drops.

### Введение

Вклад различных эффектов при описании поведения испаряющихся жидких капель изучался в работах [1–3]. Задачи о сублимации твердых частиц с учетом различных эффектов были рассмотрены в работах [4–5]. В работе [6] приведено решение задачи об испарении двух капель с использованием биполярной системы координат. В работе [4] предложен операторный метод для решения класса задач о двух взаимодействующих аэрозольных частицах. Этот метод является более простым и позволяет учесть больше эффектов, чем использование биполярной системы координат. В работе [7] этим методом решена задача об испарении двух одинаковых взаимодействующих аэрозольных капель. В данной статье

мы обобщаем результаты работы [7] на случай двух капель с произвольными радиусами при произвольных расстояниях между каплями.

### Методы

Пусть две неподвижные капли (радиусы сферических капель могут быть существенно отличающимися) одного и того же чистого вещества находятся в бинарной газовой смеси. Первый компонент смеси состоит из молекул летучего вещества капель, а второй компонент – из молекул несущего газа. Молекулы газа на поверхностях капель не испытывают фазового перехода. Радиусы капель будем считать много большими по сравнению со средней длиной свободного пробега молекул смеси. Пусть  $n_1$  и  $n_2$  – численные концентрации молекул первого и второго компонентов смеси,  $n_0 = n_1 + n_2$ ,  $c_1 = n_1/n_0$ ,  $T_e$  – поле температуры в смеси. Будем считать, что на большом расстоянии от капель величины  $T_e$  и  $c_1$  постоянны и равны, соответственно, значениям  $T_{e\infty}$  и  $c_{1\infty}$ . Предполагается, что величины  $T_e$  и  $c_1$  также удовлетворяют условиям  $c_1 \ll 1$  и  $|(T_e - T_{e\infty})/T_{e\infty}| \ll 1$ .

Пусть  $T_i^{(j)}$  – поле температуры внутри  $j$ -й капли, где  $j \in \{1, 2\}$ . Поля  $T_e$ ,  $T_i^{(j)}$  и  $c_1$  описываются системой уравнений  $\Delta T_e = 0$ ,  $\Delta T_i^{(j)} = 0$ ,  $\Delta c_1 = 0$ .

На поверхности  $j$ -й капли выполняются условия:  $T_e = T_i^{(j)}$ ,  $c_1 = c_{1s}(T_i^{(j)})$ ,

$-\kappa_e(\nabla T_e, \vec{e}_j) - L_1 m_1 n_0 D_{12}(\nabla c_1, \vec{e}_j) = -\kappa_i(\nabla T_i^{(j)}, \vec{e}_j)$ , где  $c_{1s}(T)$  – относительная кон-

центрация молекул насыщенных паров вещества капель при температуре  $T$ ,  $\kappa_e$  и  $D_{12}$  – коэффициент теплопроводности и коэффициент взаимной диффузии компонентов смеси,  $L_1$  и  $m_1$  – удельное тепло фазового перехода и масса молекул первого компонента,  $\kappa_i$  – коэффициент теплопроводности вещества капель,  $\vec{e}_j$  –

единичный вектор внешней нормали к поверхности  $j$ -й капли, а запись  $(\vec{a}, \vec{b})$

означает скалярное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Пусть  $T_{i0}$  – невозмущенное (другой каплей) значение температуры поверхности одиночной капли. Решение задачи об испарении одиночной капли приводит к следующему соотношению относительно  $T_{i0}$  [6]:

$$\kappa_e(T_{i0} - T_{e\infty}) + L_1 m_1 n_0 D_{12}(c_{1s}(T_{i0}) - c_{1\infty}) = 0.$$

Для величин  $c_{1s}(T_i^{(j)})$  на поверхностях капель используются следующие линеаризованные соотношения:

$$c_{1s}(T_i^{(j)}) = c_{1s}(T_{i0}) + \frac{\partial c_{1s}}{\partial T}(T_{i0})(T_i^{(j)} - T_{i0}) \text{ на поверхности } j\text{-й капли.}$$

Пусть  $O_1$  и  $O_2$  – центры капель,  $a_1$  и  $a_2$  – радиусы капель (для определенности будем считать, что  $a_1 \leq a_2$ ),  $O$  – середина отрезка  $O_1 O_2$ ,  $l$  – расстояние между центрами капель. Направления оси  $Oz$  декартовой системы координат  $Oxyz$  и век-

тора  $\overline{O_1O_2}$  совпадают. Путём параллельного переноса системы  $Oxuz$  в точки  $O_1$  и  $O_2$  получим еще две декартовы системы координат. Пусть  $r_j, \theta_j, \varphi_j$  – сферические координаты точки в системе координат с началом в точке  $O_j$ , а  $r, \theta, \varphi$  – сферические координаты точки в системе координат с началом в точке  $O$ . Поля  $T_e, T_i^{(j)}$  и  $c_1$  обладают свойством осевой симметрии относительно оси  $Oz$ . Пусть  $P_n$  – многочлен Лагранжа,  $P_n^{(j)} = P_n(\cos\theta_j)$ ,  $H_n^{(j)} = r_j^n P_n(\cos\theta_j)$ ,  $H_{-n-1}^{(j)} = r_j^{-n-1} P_n(\cos\theta_j)$ .

Поле  $T_e$  представляется в виде  $T_e = T_{e\infty} + \varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)}$ , где  $\varepsilon^{(j)}$  – возмущение значения  $T_{e\infty}$ , вызванное  $j$ -й каплей и удовлетворяющее условиям  $\Delta\varepsilon^{(j)} = 0$  и  $\lim_{r \rightarrow \infty} \varepsilon^{(j)} = 0$ .

Записав каждое возмущение в виде разложения по объемно-сферическим функциям [8] в своей системе координат, получим разложение:

$$T_e = T_{e\infty} + \sum_{s=0}^{\infty} A_{es}^{(1)} H_{-s-1}^{(1)} + \sum_{n=0}^{\infty} A_{en}^{(2)} H_{-n-1}^{(2)},$$

где  $A_{es}^{(1)}$ ,  $A_{en}^{(2)}$  – неопределенные коэффициенты. Аналогично разлагается  $c_1$

$$c_1 = c_{1\infty} + \sum_{s=0}^{\infty} A_{cs}^{(1)} H_{-s-1}^{(1)} + \sum_{n=0}^{\infty} A_{cn}^{(2)} H_{-n-1}^{(2)},$$

где  $A_{cs}^{(1)}$ ,  $A_{cn}^{(2)}$  – неопределенные коэффициенты. Так как поля  $T_i^{(j)}$  ограничены при  $r_j \rightarrow 0$ , то они представляются в следующем виде:

$$T_i^{(j)} = T_{i0} + \sum_{s=0}^{\infty} A_{is}^{(j)} H_s^{(j)}, \text{ где } A_{is}^{(j)} \text{ – неопределенные коэффициенты.}$$

Пусть  $A_{en}^{(1)} = (T_{i0} - T_{e\infty}) a_1^{n+1} x_{en}^{(1)}$ ,  $A_{en}^{(2)} = (T_{i0} - T_{e\infty}) (-1)^n a_2^{n+1} x_{en}^{(2)}$ ,  $A_{cn}^{(1)} = (c_{1s}(T_{i0}) - c_{1\infty}) a_1^{n+1} x_{cn}^{(1)}$ ,  $A_{cn}^{(2)} = (c_{1s}(T_{i0}) - c_{1\infty}) (-1)^n a_2^{n+1} x_{cn}^{(2)}$ ,  $A_{in}^{(1)} = (T_{i0} - T_{e\infty}) a_1^{-n} x_{in}^{(1)}$ ,  $A_{in}^{(2)} = (T_{i0} - T_{e\infty}) (-1)^n a_2^{-n} x_{in}^{(2)}$ , где  $x_{en}^{(j)}$ ,  $x_{cn}^{(j)}$ ,  $x_{in}^{(j)}$  – неопределенные коэффициенты.

При учете граничных условий на поверхности одной капли, вблизи этой капли объемно-сферические функции, записанные в сферической системе координат с началом в центре другой капли, разлагаются по объемно-сферическим функциям, записанным в сферической системе координат с началом в центре рассматриваемой капли с использованием формул [9]:

$$H_{-n-1}^{(2)} = (-1)^n \sum_{s=0}^{\infty} I^{-n-s-1} C_{n+s}^n H_s^{(1)},$$

$$H_{-n-1}^{(1)} = \sum_{s=0}^{\infty} I^{-n-s-1} C_{n+s}^n (-1)^s H_s^{(2)},$$

а в получившихся двойных суммах меняется порядок суммирования. Пусть

$X_e^{(j)} = (x_{e0}^{(j)}, x_{e1}^{(j)}, \dots)^T$ ,  $X_c^{(j)} = (x_{c0}^{(j)}, x_{c1}^{(j)}, \dots)^T$ ,  $X_i^{(j)} = (x_{i0}^{(j)}, x_{i1}^{(j)}, \dots)^T$ . Поиск этих шести векторов будем вести в пространстве  $l_1 = \left\{ X \mid X = (x_1, x_2, \dots)^T, \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < +\infty \right\}$

[10] операторными методами. Пространство  $l_1$  является линейным нормированным пространством с нормой  $\|X\| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$ . Пусть  $L_1^{(M)}$  – линейное пространство

матриц  $A$  с бесконечным числом строк и столбцов, элементы  $a_{sn}$  которых удовлетворяют условию  $\sup_n \sum_{s=1}^{\infty} |a_{sn}| < +\infty$ . Это пространство является линейным нор-

мированным пространством с нормой  $\|A\| = \sup_n \sum_{s=1}^{\infty} |a_{sn}|$ . В пространстве  $l_1$  рассмо-

трим линейный оператор, действующий из  $l_1$  в  $l_1$  по формуле  $Y = AX$ , где  $A \in L^{( )}$

$X \in l_1$ ,  $AX$  – произведение матрицы  $A$  на вектор  $X$ . Для матрицы и порожденного ею матричного оператора будем использовать одно и тоже обозначение. Можно показать, что норма матричного оператора  $A$ , согласованная с нормой вектора  $X$ ,

равна  $\|A\| = \sup_n \sum_{s=1}^{\infty} |a_{sn}|$ . Для элемента матрицы  $A$  с индексами  $s$  и  $n$  кроме стан-

дартного обозначения  $a_{sn}$  будем использовать и обозначение  $(A)_{sn}$ .

Пусть координаты вектора  $E_1 \in l_1$  определяются по формуле  $E_1 = (1, 0, 0, \dots)^T$ , а элементы матриц  $\Lambda_1 \in L_1^{(M)}$ ,  $M_{1,2} \in L_1^{(M)}$ ,  $M_{2,1} \in L_1^{(M)}$  определяются по формулам

$(\Lambda_1)_{sn} = (s-1)/s\delta_{sn}$ ,  $(M_{1,2})_{sn} = C_{n+s-2}^{n-1} \tau_1^{s-1} \tau_2^n$ ,  $(M_{2,1})_{sn} = C_{n+s-2}^{n-1} \tau_2^{s-1} \tau_1^n$ , где  $s \geq 1$ ,  $n \geq 1$ ,

$\tau_1 = a_1/l$ ,  $\tau_2 = a_2/l$ ,  $\delta_{sn}$  – символ Кронекера. Граничные условия на поверхностях капель приводят к следующим уравнениям:

$$X_e^{(1)} + M_{1,2} X_c^{(2)} - X_i^{(1)} = E_1, \quad X_e^{(2)} + M_{2,1} X_c^{(1)} - X_i^{(2)} = E_1,$$

$$X_c^{(1)} + M_{1,2} X_c^{(2)} - \frac{\partial c_{1s}}{\partial T}(T_{i0}) \frac{T_{i0} - T_{e\infty}}{c_{1s}(T_{i0}) - c_{1\infty}} X_i^{(1)} = E_1,$$

$$X_c^{(2)} + M_{2,1} X_c^{(1)} - \frac{\partial c_{1s}}{\partial T}(T_{i0}) \frac{T_{i0} - T_{e\infty}}{c_{1s}(T_{i0}) - c_{1\infty}} X_i^{(2)} = E_1,$$

$$-X_e^{(1)} + \Lambda_1 M_{1,2} X_e^{(2)} + X_c^{(1)} - \Lambda_1 M_{1,2} X_c^{(2)} = \frac{\kappa_i}{\kappa_e} \Lambda_1 X_i^{(1)},$$

$$-X_e^{(2)} + \Lambda_1 M_{2,1} X_e^{(1)} + X_c^{(2)} - \Lambda_1 M_{2,1} X_c^{(1)} = \frac{\kappa_i}{\kappa_e} \Lambda_1 X_i^{(2)}.$$

Из этой системы следует, что

$$X_e^{(1)} = X_c^{(1)} = (E - M_{1,2}M_{2,1})^{-1} (E - M_{1,2})E_1, \quad (1)$$

$$X_e^{(2)} = X_c^{(2)} = (E - M_{2,1}M_{1,2})^{-1} (E - M_{2,1})E_1, \quad (2)$$

$$X_i^{(1)} = X_i^{(2)} = 0, \quad (3)$$

где элементы матрицы  $E$  определяются по формуле  $(E)_{sn} = \delta_{sn}$ , где  $s \geq 1$ ,  $n \geq 1$ . Можно показать, что  $\|M_{1,2}M_{2,1}\| < 1$ ,  $\|M_{2,1}M_{1,2}\| < 1$ ,  $\|\Lambda_1\| = 1$ , следовательно [10]  $(E - M_{1,2}M_{2,1})^{-1} \in L_1^{(M)}$ ,  $(E - M_{2,1}M_{1,2})^{-1} \in L_1^{(M)}$ . На основе соотношений (1)–(2)

поля  $T_e$  и  $c_1$  могут быть записаны с использованием ограниченных линейных операторов и линейных функционалов, определенных в  $l_1$ . Но для нахождения времени полного испарения капель достаточно вывести формулы для величины  $\frac{\partial c_1}{\partial r_j}$  на поверхностях капель. Пусть элементы матриц  $\Lambda_2$  и  $\Lambda_3$  определяются по

формулам  $(\Lambda_2)_{sn} = s\delta_{sn}$ ,  $(\Lambda_3)_{sn} = (s-1)\delta_{sn}$ , где  $s \geq 1$ ,  $n \geq 1$ , а  $P(\theta_1)$  – ограниченный линейный функционал, определенный в  $l_1$  и равный для любого  $X = (x_1, x_2, \dots)^T \in l_1$  скалярному произведению векторов  $(P_0(\cos\theta_1), P_1(\cos\theta_1), P_2(\cos\theta_1), \dots)$  и  $(x_1, x_2, \dots)$ . Тогда на поверхности первой капли:

$$\frac{\partial c_1}{\partial r_1} = \frac{c_{1s}(T_{i0}) - c_{1\infty}}{a} \left[ -P(\theta_1)\Lambda_2 X_e^{(1)} + P(\theta_1)\Lambda_3 M_{1,2} X_c^{(2)} \right] \quad (4)$$

$(\Lambda_2 \bar{\in} L_1^{(M)})$ ,  $(\Lambda_3 \bar{\in} L_1^{(M)})$ , но можно показать, что  $\Lambda_2 X_e^{(1)} \in l_1$ ,  $\Lambda_3 M_{1,2} X_c^{(2)} \in l_1$ . На основании формулы (4) можно найти в сферической системе координат с началом в центре первой капли величину первого компонента через бесконечно малый элемент ее поверхности:

$$dQ_1^{(1)} = -n_0 D_{12} \frac{\partial c_1}{\partial r_1} a_1^2 \sin\theta_1 d\theta_1 d\varphi_1. \quad (5)$$

Из формулы (5) можно вывести формулу для потока  $Q_1^{(1)}$  первого компонента через поверхность первой капли:

$$Q_1^{(1)} = 4\pi n_0 D_{12} a_1 (c_{1s}(T_{i0}) - c_{1\infty}) E_1^T (E - M_{1,2}M_{2,1})^{-1} (E - M_{1,2}) E_1. \quad (6)$$

Аналогично можно вывести формулу для потока  $Q_1^{(2)}$  первого компонента через поверхность второй капли:

$$Q_1^{(2)} = 4\pi n_0 D_{12} a_2 (c_{1s}(T_{i0}) - c_{1\infty}) E_1^T (E - M_{2,1}M_{1,2})^{-1} (E - M_{2,1}) E_1. \quad (7)$$

Имея дело с достаточно малыми аэрозольными каплями, мы можем пренебречь временами релаксаций полей температур и концентраций и рассматривать процесс испарения в квазистационарном приближении. Пусть радиусы ка-

пель  $a_1$  и  $a_2$  являются функциями, зависящими от времени  $t$ , а расстояние между центрами капель  $l$  является величиной постоянной. Для значений радиусов  $a_1$  и  $a_2$  момент времени  $t = 0$  будем использовать обозначения  $a_{1,0}$  и  $a_{2,0}$ . Так как  $\frac{d}{dt} \left( \frac{4}{3} \pi a_1^3 \rho_i \right) = -m_1 Q_1^{(1)}$ ,  $\frac{d}{dt} \left( \frac{4}{3} \pi a_2^3 \rho_i \right) = -m_1 Q_1^{(2)}$ , где  $\rho_i$  – плотность вещества ка-

пель, и  $a_1 = l\tau_1$ ,  $a_2 = l\tau_2$ , то получим систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\tau_1}{dt} = -\frac{m_1 n_0 D_{12} (c_{1s}(T_{i0}) - c_{1\infty})}{l^2 \rho_i \tau_1} E_1^T (E - M_{1,2} M_{2,1})^{-1} (E - M_{1,2}) E_1. \quad (8)$$

$$\frac{d\tau_2}{dt} = -\frac{m_1 n_0 D_{12} (c_{1s}(T_{i0}) - c_{1\infty})}{l^2 \rho_i \tau_2} E_1^T (E - M_{2,1} M_{1,2})^{-1} (E - M_{2,1}) E_1. \quad (9)$$

Из уравнений (8)–(9) получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\tau_2}{d\tau_1} = \frac{\tau_1 E_1^T (E - M_{2,1} M_{1,2})^{-1} (E - M_{2,1}) E_1}{\tau_2 E_1^T (E - M_{1,2} M_{2,1})^{-1} (E - M_{1,2}) E_1}. \quad (10)$$

Пусть  $\tau_{1,0} = a_{1,0}/l$ ,  $\tau_{2,0} = a_{2,0}/l$ . Уравнение (10) дает возможность изучать численными методами зависимость  $\tau_2$  от  $\tau_1$  на отрезке  $[0, \tau_{1,0}]$  при начальном условии  $\tau_2(\tau_{1,0}) = \tau_{2,0}$  и найти значение  $\tau_2$  при значении  $\tau_1 = 0$ . Пусть  $\tau_3 = \tau_2(0)$ . Тогда  $a_3 = l\tau_3$  – радиус второй (большей) капли в момент полного испарения первой капли. В данной работе при решении уравнения (10) использовался метод Рунге-Кутты четвертого порядка. При вычислении правой части уравнения (10) вместо бесконечномерных матриц  $M_{1,2}$  и  $M_{2,1}$  использованы их конечномерные (урезанные) аналоги, позволяющие достичь высокую точность вычислений.

Зная зависимость  $\tau_2$  от  $\tau_1$  на отрезке  $[0, \tau_{1,0}]$  и значение  $\tau_3 = \tau_2(0)$ , можно найти время полного испарения обеих капель. Найдем сначала время испарения первой (меньшей) капли. Из уравнения (8) можно получить следующее дифференциальное уравнение с разделенными переменными:

$$dt = -\frac{\rho_i l^2}{m_1 n_0 D_{12} (c_{1s}(T_{i0}) - c_{1\infty})} \cdot \frac{\tau_1 d\tau_1}{E_1^T (E - M_{1,2} M_{2,1})^{-1} (E - M_{1,2}) E_1}. \quad (11)$$

Пусть  $t_{e,1}^{(s)}$  – время полного испарения одиночной первой капли с начальным радиусом  $a_{1,0}$ , а  $t_e^{(1)}$  – время полного испарения этой капли с учетом взаимодействия со второй каплей с начальным радиусом  $a_{2,0}$ . Проинтегрировав обе части этого уравнения (11) от 0 до  $t_e^{(1)}$ , получим:

$$t_e^{(1)} = \frac{\rho_i a_{1,0}^2}{2m_1 n_0 D_{12} (c_{1s}(T_{i0}) - c_{1\infty})} \cdot \frac{2}{\tau_{1,0}^2} \int_0^{\tau_{1,0}} \frac{\tau_1 d\tau_1}{E_1^T (E - M_{1,2} M_{2,1})^{-1} (E - M_{1,2}) E_1}. \quad (12)$$

Пусть  $l \rightarrow +\infty$ . Тогда из формулы (12) следует формула:

$$t_{e,1}^{(s)} = \frac{\rho_i a_{1,0}^2}{2m_1 n_0 D_{12} (c_{1s}(T_{i0}) - c_{1\infty})}. \quad (13)$$

Величина

$$f_1 = \frac{2}{\tau_{1,0}^2} \int_0^{\tau_{1,0}} \frac{\tau_1 d\tau_1}{E_1^T (E - M_{1,2} M_{2,1})^{-1} (E - M_{1,2}) E_1} \quad (14)$$

характеризует влияние второй капли на время полного испарения первой капли, так как  $t_e^{(1)} = f_1 \cdot t_{e,1}^{(s)}$ . При вычислении интеграла в правой части соотношения (14) нами была использована формула Симпсона.

Пусть  $t_{e,2}^{(s)}$  – время полного испарения одиночной второй капли с начальным радиусом  $a_{2,0}$ , а  $t_e^{(2)}$  – время полного испарения этой капли с учетом взаимодействия с первой каплей с начальным радиусом  $a_{1,0}$ . Величина  $t_{e,2}^{(s)}$  может быть вычислена по формуле (13), если в эту формулу вместо величины  $a_{1,0}$  подставить  $a_{2,0}$ :

$$t_{e,2}^{(s)} = \frac{\rho_i a_{2,0}^2}{2m_1 n_0 D_{12} (c_{1s}(T_{i0}) - c_{1\infty})}. \quad (15)$$

Легко показать, что

$$t_e^{(2)} = t_{e,2}^{(s)} \left[ f_1 \left( \frac{\tau_{1,0}}{\tau_{2,0}} \right)^2 + \left( \frac{\tau_3}{\tau_{2,0}} \right)^2 \right]. \quad (16)$$

Таким образом, величина

$$f_2 = f_1 \left( \frac{\tau_{1,0}}{\tau_{2,0}} \right)^2 + \left( \frac{\tau_3}{\tau_{2,0}} \right)^2 \quad (17)$$

характеризует влияние первой капли на время полного испарения второй капли, так как  $t_e^{(2)} = f_2 \cdot t_{e,2}^{(s)}$ .

### Анализ полученных результатов

Из соотношений (3) следует, что  $T_i^{(1)} = T_i^{(2)} = T_{i0}$ , то есть температура внутри капель распределена однородно, температуры капель равны. При  $a_1 = a_2$  из полученного решения можно вывести решение задачи об испарении двух одинаковых взаимодействующих аэрозольных капель. Расчеты поправочных коэффициентов  $f_1$  и  $f_2$  по формулам (14) и (17) показывают, что вторая (большая) капля может существенно увеличить время полного испарения первой (меньшей) капли, если начальные радиусы  $a_{1,0}$  и  $a_{2,0}$  отличаются существенно. Пусть, например,  $a_{2,0} = 5a_{1,0}$ . При рассмотрении двух взаимодействующих испаряющихся капель

нас будут интересовать зависимость радиуса большей капли от радиуса меньшей капли в процессе испарения, значение радиуса большей капли  $a_3$  в момент полного испарения меньшей капли и значения поправочных коэффициентов  $f_1$  и  $f_2$ , характеризующих фактор взаимодействия капель. Для расстояния между каплями выберем два значения:  $l = 10a_{1,0}$  и  $l = 8a_{1,0}$ . На рис. 1 представлены графики, описывающие зависимость переменного радиуса  $a_2$  от переменного радиуса  $a_1$  в процессе испарения двух капель. По оси  $x$ , начиная от значения  $x = 1$ , в сторону уменьшения отложены значения безразмерного радиуса испаряющейся первой капли  $x = a_1/a_{1,0}$ , а по оси  $y$  – соответствующие значения безразмерного радиуса второй капли  $y = a_2/a_{1,0}$ .

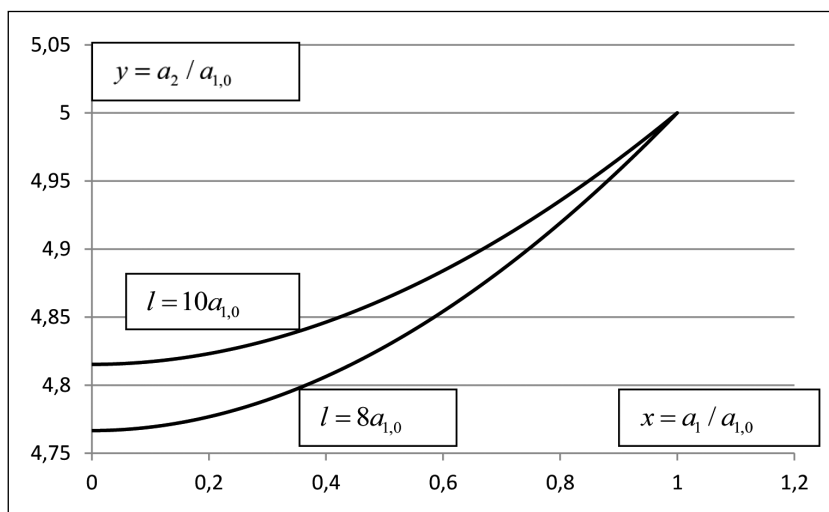


Рис. 1. Графики зависимости безразмерного радиуса второй капли  $y = a_2/a_{1,0}$  от безразмерного радиуса первой капли  $x = a_1/a_{1,0}$  при  $a_{2,0} = 5a_{1,0}$  для значений  $l = 8a_{1,0}$  и  $l = 10a_{1,0}$

Вычисления приводят к следующим значениям:  $a_3 = 4,8153a_{1,0}$ ,  $f_1 = 1,8796$ ,  $f_2 = 1,0027$ , в случае  $l = 10a_{1,0}$  и  $a_3 = 4,7666a_{1,0}$ ,  $f_1 = 2,3617$ ,  $f_2 = 1,0033$ , в случае  $l = 8a_{1,0}$ . Таким образом, вторая капля существенно влияет на время полного испарения первой капли и это влияние возрастает при сближении капель. Если радиусы капель не отличаются существенно, то такой эффект не наблюдается даже при сильном сближении капель. Например, если  $a_{2,0} = 1,25a_{1,0}$ , то  $a_3 = 0,6161a_{1,0}$ ,  $f_1 = 1,4370$ ,  $f_2 = 1,1626$  даже при  $l = 2,5a_{1,0}$ .

Статья поступила в редакцию 19.04.2018 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кузьмин М.К. Теория нестационарного процесса испарения сферической аэрозольной капли с учётом зависимости давления насыщенного пара от кривизны её поверхности // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2012. № 3. С. 39–49.



2. Кузьмин М.К. Анализ формул для вычисления времени полного испарения одиночных капель воды // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2015. № 1. С. 56–63.
3. Кузьмин М.К., Хасанов А.С. Формула для вычисления времени полного испарения аэрозольных капель с учётом коэффициентов испарения и поверхностного натяжения // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2017. № 3. С. 68–75.
4. Яламов Ю.И., Хасанов А.С. Теория движения сублимирующих и взаимодействующих твёрдых сферических неоднородных аэрозольных частиц во внешних полях. Монография. Москва: ИИУ МГОУ, 2006. 221 с.
5. Яламов Ю.И., Хасанов А.С. Фотофорез крупных сублимирующих аэрозольных частиц // Теплофизика высоких температур. 2006. Т. 44. № 2. С. 293–297.
6. Щукин Е.Р., Яламов Ю.И., Шулиманова З.Л. Избранные вопросы физики аэрозолей: учебное пособие. Москва: Московский педагогический университет, 1992. 297 с.
7. Хасанов А.С. Теория испарения двух одинаковых взаимодействующих аэрозольных капель на основе теории линейных операторов // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2018. № 1. С. 82–90.
8. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.
9. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 632 с.
10. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 542 с.

#### REFERENCES

1. Kuz'min M.K. Teoriya nestatsionarnogo protsessa ispareniya sfericheskoi aerazol'noi kapli s uchotom zavisimosti davleniya nasyshchennogo para ot krivizny ee poverkhnosti [Theory of a nonstationary process of evaporation of a spherical aerosol droplet with allowance for the dependence on the steam pressure on the curvature of its surface]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2012, no. 3, pp. 39–49.
2. Kuz'min M.K. Analiz formul dlya vychisleniya vremeni polnogo ispareniya odinochnykh kapel' vody [Analysis of formulas for calculating the time of complete evaporation of single water droplets]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2015, no. 1, pp. 56–63.
3. Kuz'min M.K., Khasanov A.S. Formula dlya vychisleniya vremeni polnogo ispareniya aerazol'nykh kapel' s uchotom koeffitsientov ispareniya i poverkhnostnogo natyazheniya [The formula for calculating the time of complete evaporation of the aerosol droplets with allowance for the coefficients of evaporation and surface tension]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2017, no. 3, pp. 68–75.
4. Yalamov Yu.I., Khasanov A.S. *Teoriya dvizheniya sublimiruyushchikh i vzaimodeistvuyushchikh tverdykh sfericheskikh neodnorodnykh aerazol'nykh chastits vo vneshnikh polyakh* [The theory of movement of sublimating and interacting solid spherical inhomogeneous aerosol particles in external fields]. Moscow, MRSU Ed. off. Publ., 2006. 221 p.
5. Yalamov Yu.I., Khasanov A.S. Fotoforez krupnykh sublimiruyushchikh aerazol'nykh chastits [Photophoresis of large sublimating aerosol particles]. In: *Teplofizika vysokikh temperatura* [High Temperature], 2006, vol. 44, no. 2, pp. 293–297.

6. Shchukin E.R., Yalamov Yu.I., Shulimanova Z.L. *Izbrannye voprosy fiziki aerolei* [Selected topics of the physics of aerosols]. Moscow, Moscow Pedagogical University Publ., 1992. 297 p.
7. Khasanov A.S. Teoriya ispareniya dvukh odinakovykh vzaimodeystvuyushchikh aerol'nykh kapel' na osnove teorii lineinykh operatorov [The theory of evaporation of two identical interacting drops of the aerosol based on the theory of linear operators]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2018, no. 1, pp. 82–90.
8. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Uraveniya matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1972. 735 p.
9. Happel J., Brenner H. *Low Reynolds number Hydrodynamics: with special application to particulate media*. Hague, Kluwer, 1983. 552 p.
10. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza* [Elements of the theory of functions and functional analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 542 p.

---

### ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Хасанов Анис Салыхович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Российского экономического университета имени Г.В. Плеханова;  
e-mail: ankhasanov@yandex.ru

### INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Anis S. Khasanov – Doctor in Physical and Mathematical Sciences, professor at the Department of Higher Mathematics, Plekhanov Russian University of Economics;  
e-mail: ankhasanov@yandex.ru

---

### ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Хасанов А.С. Решение задачи об испарении двух капель операторными методами для любых радиусов капель и любых расстояний между ними // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2018. № 2. С. 51–60. DOI: 10.18384-2310-7251-2018-2-51-60.

### FOR CITATION

Khasanov A.S. The solution of the evaporation problem of two drops by operator methods for arbitrary radii of drops and arbitrary distances between them. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*. 2018. no. 2. pp. 51–60. DOI: 10.18384-2310-7251-2018-2-51-60.