УДК 539.23+539.216.1+537.311.31
DOI: 10.18384/2310-7251-2018-2-76-81

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПФАФФА И РАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Галканов А.Г., Харитонов К.Е.
Государственный гуманитарно-технологический университет
164010, Московская обл., г. Орехово-Зуево, ул. Зелёная, д. 22, Российская Федерация

Аннотация. В рамках существующих моделей кинематики доказан критерий равномерности движения материальной точки. Рассмотрено уравнение Пфаффа в полных дифференциалах. Показано, что при определенных условиях его можно назвать уравнением равномерного движения материальной точки. Приведён пример.

Ключевые слова: уравнение Пфаффа, уравнение в полных дифференциалах, равномерное движение, уравнение равномерного движения материальной точки.

PFAFFIAN DIFFERENTIAL EQUATION AND UNIFORM MOVEMENT OF A MATERIAL POINT

A. Galkanov, K. Kharitonov
State University of Humanities and Technology
ul. Zelenaya 22, 164010 Orekhovo-Zuyevo, Moscow Region, Russian Federation

Abstract. In the framework of existing models of kinematics, the criterion for a uniform motion of a material point is proved. The Pfaffian equation in total differentials is considered. It is shown that under certain conditions it can be called the equation of a uniform motion of a material point. An example is provided.

Key words: Pfaffian equation, equation in complete differentials, uniform motion, equation of uniform motion of a material point.

Движение материальных тел с учетом действия на них различных сил было приведено в работах [1–5]. В данной статье рассматривается абстрактная задача в целом математического содержания, главной целью которой является последующее приложение представленных в ней результатов к конкретным физическим вопросам. Приводится детальный разбор кинематики материальной точки в условиях невесомости и демонстрация того, как «работает» предлагаемый метод описания поверхностей движения благодаря уравнению Пфаффа, к которому, в конечном итоге, приводит необходимое для этого условие ортогональности радиус-вектора материальной точки и ее скорости. Пренебрежение в работе силой тяжести и другими силами вовсе не означает, что их роль не важна и их не стоит принимать во внимание. Эта задача будет предметом нашего отдельного исследования.

Пусть $\vec{r}(M), \vec{v}(M), \vec{u}(M)$ – перемещение, скорость и ускорение материальной точки M соответственно, $r(M)$, $v(M)$, $u(M)$ – их модули, t_0 – начальный момент времени, $T = (t_0; +\infty)$ – временной промежуток, $(..., ...)$ – знак скалярного умножения векторов, $\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t)$ – скорость как производная от перемещения по времени, $\vec{u}(t) = \vec{v}\,'(t)$ – ускорение как производная от скорости по времени. И пусть траекторией движения точки M является гладкая линия L, т.е.

$$L: \begin{cases} x = x(t), y = y(t), z = z(t), \\ \qquad t \in T = (t_0; +\infty), \end{cases} \tag{1}$$

где параметр t принимается за время.

Теорема 1 (критерий равномерности движения). Ортогональность скорости и ускорения точки M на промежутке T необходима и достаточна для равномерности движения этой точки на этом промежутке по траектории L.

Доказательство. По определению движение точки равномерно, если модуль её скорости есть постоянная величина. Имеем:

$$v = c_1 = const \Leftrightarrow v^2 = c_2 = const \Leftrightarrow (v^2)' = 0 \Leftrightarrow (\vec{v}, \vec{v})' =$$
$$= 0 \Leftrightarrow 2(\vec{v}, \vec{v}\,') = 0 \Leftrightarrow (\vec{v}, \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{u}.$$

Пусть $G \subseteq E^3$, где E^3 – трёхмерное евклидово пространство. В области G рассмотрим уравнение Пфаффа [6; 7]

$$p(x, y, z)dx + q(x, y, z)dy + r(x, y, z)dz = 0, \tag{2}$$

где $p(x, y, z)$, $q(x, y, z)$, $r(x, y, z)$ – непрерывные функции в области G.

По аналогии с уравнением в полных дифференциалах:

$$\begin{cases} \qquad p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0, \\ \exists \varphi(x, y) \in D(X) : \varphi_x = p(x, y), \varphi_y = q(x, y), X \subseteq R^2 \end{cases}$$

уравнение Пфаффа естественно назвать уравнением в полных дифференциалах в области G, если в этой области существует дифференцируемая функция $\varphi(x, y, z)$, такая, что в каждой точке области G выполняются условия:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \varphi_x = p(x, y, z), \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \varphi_y = q(x, y, z), \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \varphi_z = r(x, y, z), \tag{3}$$

где $D(G)$ – множество дифференцируемых функций в области G.

Пусть уравнение Пфаффа (2) является уравнением в полных дифференциалах в области G. Тогда $\sigma{:}\varphi(x, y, z) = c$ есть однопараметрическое семейство интегральных поверхностей уравнения Пфаффа. Если вектор $\vec{u} = p(x, y, z)\vec{e}_1 + q(x, y, z)\vec{e}_2 + r(x, y, z)\vec{e}_3$ есть ускорение точки M, движущейся по гладкой линии (1), то векторное поле U вектора ускорения $\vec{u}$ будет потенциальным полем с потенциальной функцией $\varphi(x, y, z)$, где $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – ортонормальный базис.

Теорема 2. Линия L является траекторией равномерного движения точки M в потенциальном поле U вектора ускорения $\vec{u}$ тогда и только тогда, когда она лежит на интегральной поверхности σ уравнения в полных дифференциалах (2).

Доказательство. Применяя теорему 1, с учётом $d\vec{r} = dx\vec{e}_1 + dy\vec{e}_2 + +dz\vec{e}_3$ для всех $t \in T$ имеем:

$$\begin{cases} \left[\left(\vec{u},\vec{v}\right)=0\right]\Big|_L, \\ \exists\varphi\left(x,y,z\right):\vec{u}=grad\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\left(\vec{u},\vec{r}'\right)=0\right]\Big|_L, \\ \exists\varphi\left(x,y,z\right):\vec{u}=grad\varphi \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\left(\vec{u},\vec{r}'dt\right)=0\right]\Big|_L, \\ \exists\varphi\left(x,y,z\right):\vec{u}=grad\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\left(\vec{u},d\vec{r}\right)=0\right]\Big|_L, \\ \exists\varphi\left(x,y,z\right):\vec{u}=grad\varphi \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p\left(x,y,z\right)dx+q\left(x,y,z\right)dy+r\left(x,y,z\right)dz\Big|_L=0, \\ \exists\varphi\left(x,y,z\right):\varphi_x=p\left(x,y,z\right),\varphi_y=q\left(x,y,z\right),\varphi_z=r\left(x,y,z\right) \end{cases} \Leftrightarrow L\subset\sigma.$$

Теорема 2 даёт основание ввести понятие дифференциального уравнения равномерного движения точки M.

Определение. Уравнение в полных дифференциалах (2) называется дифференциальным уравнением равномерного движения точки M в потенциальном поле U вектора ускорения $\vec{u} = p\vec{e}_1 + q\vec{e}_2 + r\vec{e}_3$, где $p(x, y, z)$, $q(x, y, z)$, $r(x, y, z)$.

Пример. Полагая в (2) $p = x$, $q = y$, $r = z$, получим уравнение Пфаффа вида $xdx + ydy + zdz = 0$. Оно является уравнением в полных дифференциалах и поле U вектора ускорения $\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ есть потенциальное поле. Найдем потенциальную функцию $\varphi(x, y, z)$ поля U. С учётом того, что $\varphi_x = x$, $\varphi_y = y$, $\varphi_z = z$, имеем:

$$\frac{\partial\varphi\left(x,y,z\right)}{\partial x}=x\Rightarrow\varphi\left(x,y,z\right)=\int xdx+\psi_1\left(y,z\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\varphi\left(x,y,z\right)=\frac{x^2}{2}+\psi_1\left(y,z\right);$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi\left(x,y,z\right)}{\partial y}=y, \\ \dfrac{\partial\varphi\left(x,y,z\right)}{\partial y}=\dfrac{\partial\psi_1\left(y,z\right)}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial\psi_1\left(y,z\right)}{\partial y}=y\Rightarrow\psi_1\left(y,z\right)=\frac{y^2}{2}+\psi_2\left(z\right);$$

$$\varphi\left(x,y,z\right)=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\psi_2\left(z\right);$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial z} = z, \\ \dfrac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial z} = \dfrac{\partial\psi_2(z)}{\partial z} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial\psi_2(z)}{\partial z} = z \Rightarrow \psi_2(z) = \frac{z^2}{2} + c_1;$$

$$\varphi(x,y,z) = \frac{x^2+y^2+z^2}{2} + c_1.$$

Следовательно, семейство интегральных поверхностей данного уравнения представляет собой концентрические сферы $\sigma{:}x^2 + y^2 + z^2 = c^2$ радиуса c. И, согласно теореме 2, всякая линия L, лежащая на этой сфере, является траекторией равномерного движения точки M. Так, например, в любой момент времени $t \in T$ линия

$$L: \begin{cases} x = c\sin\omega_1 t\sin\omega_2 t, y = c\sin\omega_1 t\cos\omega_2 t, z = c\cos\omega_1 t, \\ 0 \le \omega_1 t \le \pi, 0 \le \omega_2 t \le 2\pi \end{cases}$$

лежит на сфере σ, где ω_1, ω_2 – угловые скорости по зениту и по азимуту соответственно. Модуль скорости точки M равен $v = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = c = \text{const}$, то есть линия L – траектория равномерного движения точки M.

Таким образом, на основании полученных результатов можно заключить следующее:

– впервые составлено дифференциальное уравнение, которое обоснованно названо дифференциальным уравнением равномерного движения материальной точки, которое является принципиально новым результатом;

– показано, что именно в потенциальном поле ускорения равномерное движение материальной точки моделируется уравнением Пфаффа, что также является принципиально новым результатом;

– апробация дифференциального уравнения равномерного движения показана на примере движения материальной точки по пространственной траектории на сфере.

Статья поступила в редакцию 24.04.2018 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука. 1989. 472 с.
2. Гладков С.О., Богданова С.Б. Геометрический фазовый переход в задаче о брахистохроне // Ученые записки физического факультета МГУ. 2016. № 1. С. 161101 (1–6).
3. Гладков С.О., Богданова С.Б. Обобщенные динамические уравнения плоского криволинейного движения материального тела по желобу с учетом сил трения (их численный анализ в некоторых частных случаях) // Ученые записки физического факультета МГУ. 2017. № 1. С. 171101 (1–5).
4. Гладков С.О., Богданова С.Б. К теории движения шарика по вращающейся брахистохроне с учетом сил трения // Ученые записки физического факультета МГУ. 2017. № 2. С. 172101 (1–6).

5. Гладков С.О., Богданова С.Б. Аналитическое и численное решение задачи о брахистохроне в некоторых общих случаях // Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры». 2018. Т. 145. С. 114–122.
6. Математическая энциклопедия / гл. ред. И.М. Виноградов. М.: Советская Энциклопедия. 1984. Т. 4. 775 с.
7. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы. 1950. 473 с.

REFERENCES

1. Arnol'd V.I. *Matematicheskie metody klassicheskoi mekhaniki* [Mathematical methods of classical mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1989. 472 p.
2. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. Geometricheskii fazovyi perekhod v zadache o brakhistokhrone [Geometric phase transition in the brachistochrone problem]. In: *Uchenye zapiski fizicheskogo fakul'teta MGU* [Memoirs of the Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University], 2016, no. 1. P. 161101 (1–6).
3. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. Obobshchennye dinamicheskie uravneniya ploskogo krivolineinogo dvizheniya material'nogo tela po zhelobu s uchetom sil treniya (ikh chislennyi analiz v nekotorykh chastnykh sluchayakh) [Generalized dynamical equations for the plane curvilinear motion of a material body along a groove with allowance for friction forces (their numerical analysis in some special cases)]. In: *Uchenye zapiski fizicheskogo fa-kul'teta MGU* [Memoirs of the Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University], 2017, no. 1, P. 171101 (1–5).
4. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. K teorii dvizheniya sharika po vrashchayushcheisya brakhistokhrone s uchetom sil treniya [To the theory of motion of a ball along a rotating brachistochrone with allowance for friction forces]. In: *Uchenye zapiski fizicheskogo fakul'teta MGU* [Memoirs of the Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University], 2017, no. 2, P. 172101 (1–6).
5. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. Analiticheskoe i chislennoe reshenie zadachi o brakhistokhrone v nekotorykh obshchikh sluchayakh [Analytic and numerical solution of the problem of brachistochrone in some general cases]. In: *Itogi nauki i tekhniki. Seria "Sovremennaya matematika i ee prilozheniya. Tematicheskie obzory"* [Journal of Mathematical Sciences], 2018, vol. 145, pp. 114–122.
6. Vinogradov I.M., chief ed. *Matematicheskaya entsiklopediya* [Mathematical encyclopedia]. Moscow, Sovetskaya Entsiklopediya Publ., 1984. Vol. 4. 775 p.
7. Stepanov V.V. *Kurs differentsial'nykh uravnenii* [Course of differential equations]. Mosciw, State. publishing house of theoretical technical literature, 1950. 473 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Галканов Аллаберди Галканович – кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой математики и физики Государственного гуманитарно-технологического университета;
e-mail: agalkanov@yandex.ru;

Харитонов Кирилл Евгеньевич – аспирант кафедры математики и физики Государственного гуманитарно-технологического университета;
e-mail: kirillharitonov1@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Allaberdi G. Galkanov – PhD in Technical Sciences, associate professor, head of the Department of Mathematics and Physics, State University of Humanities and Technology;
e-mail: agalkanov@yandex.ru;

Kirill E. Kharitonov – postgraduate student at the Department of Mathematics and Physics, State University of Humanities and Technology;
e-mail: kirillharitonov1@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Галканов А.Г., Харитонов К.Е. Дифференциальное уравнение Пфаффа и равномерное движение материальной точки // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2018. № 2. С. 76–81.
DOI: 10.18384/2310-7251-2018-2-76-81.

FOR CITATION

Galkanov A.G., Kharitonov K.E. Pfaffian differential equation and uniform movement of a material point. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*. 2018. no. 2. pp. 76–81.
DOI: 10.18384/2310-7251-2018-2-76-81.